Resolución 2^{do} Parcial - MA1111

1. $\left[\text{TOTAL 16 puntos}\right]$ Calcule cada uno de los siguientes límites, indicando el tipo de indeterminación que se presente (de ser el caso)

   (a) $\left[\text{2 puntos}\right]$ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}$.

   Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación.

   Levantamos la indeterminación, para ello racionalizamos

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,\frac{\sqrt{1-x^4}}{\sqrt{1-x^4}} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^4}}{\left(\sqrt{1-x^4}\right)^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^4}}{1-x^4} = \lim_{x\to 1} \frac{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^4}}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^2} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{\sqrt{1-\left(1\right)^4}}{1+\left(1\right)^2} = \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

   Luego

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^4}} = 0 \quad \leftarrow \ \textbf{existe.}}$$

★

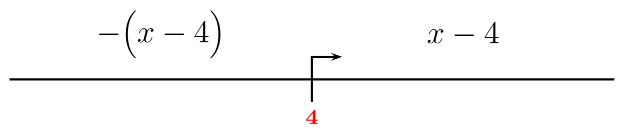
(b) $\left[2 \text{ puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4}$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación.

Por definición de valor absoluto se tiene

$$\left|x-4\right| = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x-4 \geq 0 \\ -\left(x-4\right) & \text{si} \quad x-4<0 \end{cases} = \begin{cases} x-4 & \text{si} \quad x \geq 4 \\ -\left(x-4\right) & \text{si} \quad x<4 \end{cases}$$

Tenemos



Por la naturaleza de la función calculamos los límites laterales

- **Límite lateral derecho.** Cuando x se aproxima a $x=4$ por la derecha se tiene

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16+\left(x-4\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(x-4\right)\left(x+4\right)+\left(x-4\right)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4^+} \frac{\left(x-4\right)\left(x+4+1\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \left(x+5\right) \overset{\text{S.I.}}{=} (4)+5 = 9,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4} = 9.$$

- **Límite lateral izquierdo.** Cuando x se aproxima a $x=4$ por la izquierda se tiene

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16-\left(x-4\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{\left(x-4\right)\left(x+4\right)-\left(x-4\right)}{x-4}$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{\left(x-4\right)\left(x+4-1\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4^+} \left(x+3\right) \overset{\text{S.I.}}{=} (4)+3 = 7,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4} = 7.$$

Como, los **límites laterales** son **diferentes**,

$$\lim_{x\to 4^-} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4} = 7 \neq 9 = \lim_{x\to 4^+} \frac{x^2-16+\left|x-4\right|}{x-4},$$

entonces

$$\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{x^2 - 16 + \left|x-4\right|}{x-4} \quad \leftarrow \ \textbf{NO existe.}}$$

★

(c) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\infty-\infty$. Levantamos la indeterminación, aplicamos la conjugada

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)\frac{\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+4x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2+4x}\right)^2}{x-\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\left(x^2+4x\right)}{x-\sqrt{x^2+4x}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-x^2-4x}{x-\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x-\sqrt{x^2+4x}},$$

este último límite presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x-\sqrt{x^2+4x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x-\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{4}{x}\right)}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x-\left|x\right|\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}},$$

como $x\to-\infty$, entonces $\left|x\right|=-x$, así,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x-\left|x\right|\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x+x\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4x}{x\left(1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{x}}}\overset{\text{S.I.}}{=}\frac{-4}{1+\sqrt{1+\dfrac{4}{\left(-\infty\right)}}}=\frac{-4}{1+\sqrt{1+0}}=\frac{-4}{2}=-2.$$

Luego

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2+4x}\right)=-2\quad\leftarrow\ \textbf{existe.}}$$

★

(d) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(2 + x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)$.

Solución : Observemos que, la función $y = \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ no está definida en $x = 0$, así,

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1,$$

multiplicamos por x^2 la cadena de desigualdad, como $x^2 \geq 0$, la desigualdad no cambia

$$-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 1 \qquad \Longrightarrow \qquad -x^2 \leq x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq x^2,$$

ahora, sumamos 2, la desigualdad no cambia

$$2 - x^2 \leq 2 + x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) \leq 2 + x^2.$$

Puesto que,

$$\lim_{x\to 0}\left(2 - x^2\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 2 - \left(0\right)^2 = 2 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0}\left(2 + x^2\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 2 + \left(0\right)^2 = 2.$$

Por el **Teorema del emparedado**, se concluye que

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\left(2 + x^2\cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) = 2 \quad \leftarrow \quad \textbf{existe.}}$$

★

(e) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\operatorname{sen}^2\left(\pi x\right)}$.

Solución : Este límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación, observemos que

$$\operatorname{sen}\left(\pi x\right) = \operatorname{sen}\left(2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

así,

$$\operatorname{sen}^2\left(\pi x\right) = \left(2\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)^2 = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right),$$

entonces

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\operatorname{sen}^2\left(\pi x\right)} &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}\,\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)-1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right)} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right)} \\
&= \frac{1}{4}\lim_{x\to 1} \frac{-1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+1\right)} \\
&\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{1}{4}\,\frac{-1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{2}(1)\right)\left(\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}(1)\right)+1\right)} \\
&= \frac{1}{4}\,\frac{-1}{(1)^2\left(1+1\right)} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2}\,x\right)-1}{\operatorname{sen}^2\left(\pi\,x\right)} = -\frac{1}{8} \qquad \leftarrow \quad \textbf{existe.}}$$

★

(f) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \arctan^2\left(\sqrt{\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}}\right)$.

Solución : Observemos que la función $f\left(x\right) = \arctan^2\left(\sqrt{\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}}\right)$ es la composición de las funciones

$$f_1\left(x\right) = x^2, \qquad f_2\left(x\right) = \arctan x, \qquad f_3\left(x\right) = \sqrt{x}$$

y la función combinada

$$f_4\left(x\right) = \frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}.$$

Puesto que, las funciones f_1, f_2 y f_3 son funciones continuas en todo su dominio, entonces

$$\lim_{x\to 0} \arctan^2\left(\sqrt{\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}}\right) = \arctan^2\left(\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}\right)}\right),$$

así, calculamos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}\right),$$

por propiedades de límite, obtenemos

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25}{8} - \frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{25}{8} - \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)},$$

siempre y cuando los límites existan.

- Para $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{25}{8}$. Por ser el límite de una función constante, entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{25}{8} = \frac{25}{8}.$$

- Para $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)}$. Este límite presenta una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$.

  Levantamos la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x \operatorname{sen}\left(2x\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2\,\dfrac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2}\,\frac{1}{\dfrac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}}$$

$$= \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}}\right) = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2}\right)\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}}\right),$$

donde

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\cos x - 1\right)\left(\cos x + 1\right)}{4x^2\left(\cos x + 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 x - 1}{4x^2\left(\cos x + 1\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}^2 x}{4x^2\left(\cos x + 1\right)}$$

$$= -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\left(\cos x + 1\right)} = -\frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\frac{1}{\cos x + 1}$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x + 1}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1\right)\left(1\right)\left(\frac{1}{\cos\left(0\right) + 1}\right) = -\frac{1}{4}\left(1\right)\left(1\right)\left(\frac{1}{1+1}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2} = -\frac{1}{8}.$$

Por otra parte

$$\lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Finalmente, para $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}$, proponemos el cambio de variable

$$u = 2x, \qquad \text{si} \quad x \to 0 \quad \text{entonces} \quad u = 2x \to 2\left(0\right) = 0,$$

el límite se transforma en

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x} = \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{u} = 1.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\operatorname{sen}\left(2x\right)} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{4x^2}\right)\left(\frac{\lim\limits_{x\to 0} 1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}\left(2x\right)}{2x}}\right) = \left(-\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{1}\right) = -\frac{1}{8},$$

es decir

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{2x\operatorname{sen}\left(2x\right)} = -\frac{1}{8}.$$

Así,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25}{8}-\frac{\cos x-1}{2x\,\operatorname{sen}\big(2x\big)}\right)=\frac{25}{8}-\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{25}{8}+\frac{1}{8}=\frac{26}{8}=\frac{13}{4},$$

es decir

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{25}{8}-\frac{\cos x-1}{2x\,\operatorname{sen}\big(2x\big)}\right)=\frac{13}{4}.$$

Luego

$$\lim_{x\to 0}\arctan^2\left(\sqrt{\frac{25}{8}-\frac{\cos x-1}{2x\,\operatorname{sen}\big(2x\big)}}\right)=\arctan^2\left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)=\arctan^2\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right).$$

Finalmente

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\arctan^2\left(\sqrt{\frac{25}{8}-\frac{\cos x-1}{2x\,\operatorname{sen}\big(2x\big)}}\right)=\arctan^2\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)\quad\leftarrow\ \textbf{existe.}}$$

★

2. $\left[\text{TOTAL 6 puntos}\right]$ Indique cuales de las siguientes afirmaciones son ciertas y cuales son falsas, justificando su respuesta.

(a) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\tan x - \operatorname{sen}(2x)}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{2x - 3x^2 + x^3}{x^2 - 2x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$ posee una discontinua de tipo salto en $x = 0$.

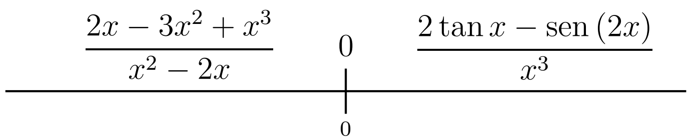
Solución : Es conocido que, una función f es continua en un punto $x = x_0$ si se cumplen cada una de las siguientes condiciones

i. $f(x_0)$ existe, es decir, el punto x_0 pertenece al dominio de la función.

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ existe y es finito.

iii. $f(x_0) = L$, es decir, el valor de la función en el punto x_0 es igual al valor del límite cuando x se aproxima a x_0.

Entonces, tenemos

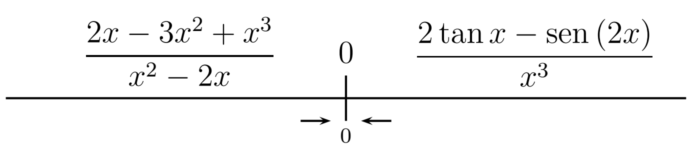


Veamos si se satisfacen las tres condiciones de continuidad

i. Para $f(0)$: Observamos que la función f está definida en $x = 0$, y vale cero, es decir,

$$\boxed{f(0) = 0 \quad \leftarrow \quad \text{existe.}}$$

ii. Para calcular $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, observemos que, por la naturaleza de la función f, debemos utilizar los límites laterales



- **Límite lateral izquierdo.** Cuando x se aproxima a $x_0 = 0$ por la izquierda se tiene

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x - 3x^2 + x^3}{x^2 - 2x},$$

el cual es un límite que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x-3x^2+x^3}{x^2-2x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\left(2-3x+x^2\right)}{x\left(x-2\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2-3x+x^2}{x-2}$$

$$\overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2-3(0)+(0)^2}{(0)-2} = \frac{2}{-2} = -1,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1.$$

- **Límite lateral derecho.** Cuando x se aproxima a $x_0=0$ por la derecha se tiene

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\tan x - \operatorname{sen}\left(2x\right)}{x^3},$$

el cual es un límite que presenta una indeterminación de la forma $\dfrac{0}{0}$. Levantamos la indeterminación

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\tan x - \operatorname{sen}\left(2x\right)}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 2\operatorname{sen} x\cos x}{x^3}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x\cos^2 x}{\cos x}}{x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} x\cos^2 x}{x^3\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x\left(1-\cos^2 x\right)}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen} x\operatorname{sen}^2 x}{x^3\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\operatorname{sen}^3 x}{x^3\cos x}$$

$$= 2\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3}\frac{1}{\cos x} = 2\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= 2\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^3\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\cos x}\right) = 2\left(1\right)^3\left(1\right) = 2,$$

es decir,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2.$$

Como, los **límites laterales** son **diferentes**,

$$-1 = \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 2,$$

entonces

$$\boxed{\lim_{x\to 0} f(x) \quad \leftarrow \quad \text{NO existe.}}$$

Puesto que, **NO** se cumple la segunda condición, 2(a)ii., de la definición de continuidad, podemos concluimos que la función f es **discontinua** en $x_0 = 0$.

Al no existir el límite cuando x tiende a $x_0 = 0$ de la función f, pero al ser los límites laterales finitos, entonces la función tiene una **discontinuidad no evitable (o esencial) de salto finito** en $x_0 = 0$.

Luego, la proposición es **VERDADERA**. ★

(b) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ La ecuación $2x^7 = 1 - x$ no tiene una solución en $\left[0,1\right]$.

Solución : Demostremos la negación de la proposición, es decir, demostremos que la ecuación

$$2x^7 = 1 - x$$

tiene una solución en $\left[0,1\right]$ y si esto es **VERDADERA**, entonces nuestra proposición será **FALSA**.

Demostrar que la ecuación $2x^7 = 1 - x$ tiene una solución en $\left[0,1\right]$, es equivalente a demostrar que

$$2x^7 - 1 + x = 0$$

en $\left[0,1\right]$, es decir, debemos encontrar la(s) raíz(ices) de la ecuación en dicho intervalo.

Consideremos la función

$$f(x) = 2x^7 - 1 + x,$$

así, debemos demostrar que existe, al menos, un valor c en $\left[0,1\right]$, tal que, $f(c) = 0$.

Observemos que la función f es continua en $\left[0,1\right]$, ya que, f es una función polinómica, además

$$f(0) = 2(0)^7 - 1 + (0) = -1, \qquad \text{y} \qquad f(1) = 2(1)^7 - 1 + (1) = 2,$$

así,

$$f(0) = -1 < 0 < 2 = f(1),$$

por el **Teorema del Valor Intermedio**, existe un valor c en el intervalo $\left[0,1\right]$, tal que, $f(c) = 0$, luego, la ecuación

$$2x^7 = 1 - x \quad \text{tiene una solución en} \quad \left[0,1\right].$$

Por lo tanto, la proposición es **FALSA**. ★

3. $\left[\text{TOTAL } 6 \text{ puntos}\right]$ Considere la función $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

   (a) $\left[3 \text{ puntos}\right]$ Aplicando la definición, obtenga la derivada de f.

   Solución : Tenemos que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+2\big(x+h\big)} - \sqrt{1+2x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} - \sqrt{1+2x}\right)}{h} \frac{\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)}{\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)}\right)^2 - \left(\sqrt{1+2x}\right)^2}{h\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1+2\big(x+h\big) - \big(1+2x\big)}{h\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1+2x+2h-1-2x}{h\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{2h}{h\left(\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+2\big(x+h\big)} + \sqrt{1+2x}} \overset{\text{S.I.}}{=} \frac{2}{\sqrt{1+2\big(x+(0)\big)} + \sqrt{1+2x}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1+2x}} = \frac{2}{2\sqrt{1+2x}} = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

   Luego

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}.$$

★

(b) $\Big[3\ \text{puntos}\Big]$ Hallar la ecuación de la recta tangente a la función f en el punto $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$.

Solución : Comenzamos recordando que para obtener una ecuación de una recta es necesario conocer un punto por donde pasa dicha recta y su pendiente, en este caso como se pide una recta tangente es obligatorio que el punto por donde pasa la recta sea **punto de tangencia**.

En primer lugar, veamos si el punto dado, $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$, es **punto de tangencia**, para ello sustituimos $x = -1$ en la función dada y verificamos si se cumpla la igualdad, es decir, obtenemos que $y = \dfrac{4}{3}$,

$$y(-1) = \sqrt{1 + 2(-1)} = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1} \neq 0, \qquad \chi$$

por lo tanto, $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$ **NO** es **punto de tangencia**. Sea $P(x_0, y_0)$ el punto de tangencia, hasta los momentos desconocido. Si $P(x_0, y_0)$ es el **punto de tangencia**, entonces, sus coordenadas son

$$P(x_0, y_0) = P\left(x_0, \sqrt{1 + 2x_0}\right).$$

Por otra parte, la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{1+2x}$ en el punto de tangencia P viene dada por

$$m_{\tan} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Por el item 3a. se tiene que

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}} \qquad \Longrightarrow \qquad m_{\tan} = f'(x_0) = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}$$

y la ecuación de la recta tangente sería

$$y - y_0 = m_{\tan}(x - x_0), \qquad \text{es decir,} \qquad y - y_0 = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}\left(x - x_0\right).$$

Puesto que, $y_0 = \sqrt{1+2x_0}$ y la recta pasa por el punto $\left(-1, \dfrac{4}{3}\right)$, entonces

$$\frac{4}{3} - \sqrt{1+2x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}\left(-1 - x_0\right).$$

Despejamos x_0

$$\frac{4}{3} - \sqrt{1+2x_0} = \frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}\left(-1 - x_0\right) \qquad \Longrightarrow \qquad 4 - 3\sqrt{1+2x_0} = \frac{3\left(-1 - x_0\right)}{\sqrt{1+2x_0}}$$

$$\Longrightarrow \quad 4\sqrt{1+2x_0}-3\left(\sqrt{1+2x_0}\right)^2=3\left(-1-x_0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 4\sqrt{1+2x_0}-3\left(1+2x_0\right)=3\left(-1-x_0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 4\sqrt{1+2x_0}=3\left(-1-x_0\right)+3\left(1+2x_0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 4\sqrt{1+2x_0}=-3-3x_0+3+6x_0$$

$$\Longrightarrow \quad 4\sqrt{1+2x_0}=3x_0 \quad \Longrightarrow \quad \left(4\sqrt{1+2x_0}\right)^2=\left(3x_0\right)^2$$

$$\Longrightarrow \quad 16\left(1+2x_0\right)=9x_0^2 \quad \Longrightarrow \quad 0=9x_0^2-16\left(1+2x_0\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 0=9x_0^2-16-32x_0 \quad \Longrightarrow \quad \left(9x_0+4\right)\left(x_0-4\right)=0,$$

de aquí, se obtiene que

$$x_0=-\frac{4}{9} \qquad \text{y} \qquad x_0=4,$$

pero $x_0=-\dfrac{4}{9}$ **NO** cumple con la igualdad

$$\frac{4}{3}-\sqrt{1+2x_0}=\frac{1}{\sqrt{1+2x_0}}\left(-1-x_0\right),$$

ya que

$$\frac{4}{3}-\sqrt{1+2\left(-\frac{4}{9}\right)}=\frac{4}{3}-\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{9-8}{9}}=\frac{4}{3}-\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{4}{3}-\frac{1}{3}=\frac{3}{3}=1,$$

por otra parte

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\left(-\frac{4}{9}\right)}}\left(-1-\left(-\frac{4}{9}\right)\right)=\frac{1}{\frac{1}{3}}\left(-1+\frac{4}{9}\right)=3\left(\frac{-9+4}{9}\right)=3\left(\frac{-5}{9}\right)=-\frac{5}{3},$$

así,

$$1=\frac{4}{3}-\sqrt{1+2\left(-\frac{4}{9}\right)}\neq\frac{1}{\sqrt{1+2\left(-\frac{4}{9}\right)}}\left(-1-\left(-\frac{4}{9}\right)\right)=-\frac{5}{3},$$

mientras que, $x_0=4$ si satisface la igualdad, ya que, por un lado

$$\frac{4}{3}-\sqrt{1+2\left(4\right)}=\frac{4}{3}-\sqrt{1+8}=\frac{4}{3}-\sqrt{9}=\frac{4}{3}-3=\frac{4-9}{3}=-\frac{5}{3},$$

por el otro

$$\frac{1}{\sqrt{1+2\left(4\right)}}\left(-1-\left(4\right)\right)=\frac{1}{3}\left(-1-4\right)=\frac{1}{3}\left(-5\right)=-\frac{5}{3}.$$

Luego, $x_0 = 4$, por lo tanto $y_0 = \sqrt{1 + 2\left(4\right)} = 3$, la pendiente es

$$m_{\tan} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2\left(4\right)}} = \frac{1}{3}$$

y la ecuación de la recta tangente viene dada por

$$y - 3 = \frac{1}{3}\left(x - 4\right),$$

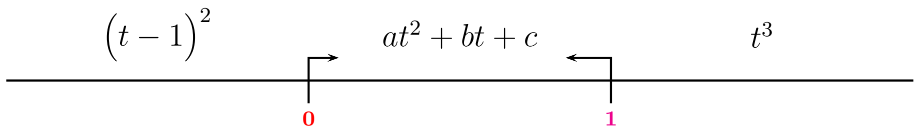
o equivalente $x - 3y + 5 = 0$. ★

4. $\left[7 \text{ puntos}\right]$ Considere la función

$$H(t) = \begin{cases} \left(t-1\right)^2 & \text{si} \quad t < 0 \\ at^2 + bt + c & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ t^3 & \text{si} \quad t > 1 \end{cases} .$$

Hallar los valores de las constantes a, b y c para que H sea continua en $t = 0$ y diferenciable en $t = 1$.

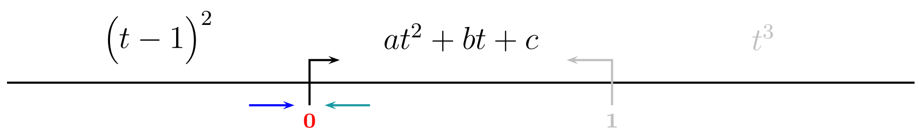
Solución : Tenemos



Estudiamos la continuidad en $t = \mathbf{0}$. Verificamos que se cumplan la condición para garantizar continuidad en un punto

(a) $H(\mathbf{0}) = H(0) = a\left(\mathbf{0}\right)^2 + b\left(\mathbf{0}\right) + c = c$ existe.

(b) $\lim\limits_{t\to \mathbf{0}} H(t)$ debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales.



- **Límite lateral izquierdo**

$$\lim_{t\to \mathbf{0}^-} H(t) = \lim_{t\to \mathbf{0}^-} \left(t-1\right)^2 \overset{\text{S.I.}}{=} \left(\left(\mathbf{0}\right)-1\right)^2 = 1.$$

- **Límite lateral derecho**

$$\lim_{t\to \mathbf{0}^+} H(t) = \lim_{t\to \mathbf{0}^+} \left(at^2 + bt + c\right) \overset{\text{S.I.}}{=} a\left(\mathbf{0}\right)^2 + b\left(\mathbf{0}\right) + c = c.$$

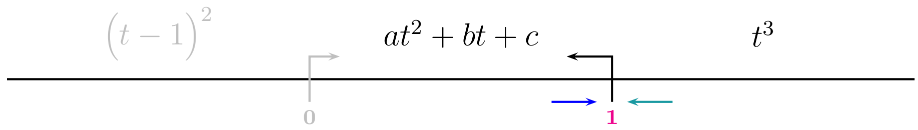
Para que el límite exista se debe cumplir que

$$\lim_{t\to \mathbf{0}^-} H(t) = \lim_{t\to \mathbf{0}^+} H(t) \qquad \Longrightarrow \qquad c = 1.$$

Estudiamos, ahora, la derivabilidad en $t = \mathbf{1}$. Para que una función sea derivable en un punto, primero debe ser continua en ese punto, así, que estudiamos la continuidad de H en $t = \mathbf{1}$.

(a) $H\left(\mathbf{1}\right) = a\left(\mathbf{1}\right)^2 + b\left(\mathbf{1}\right) + 1 = a + b + 1$ existe.

(b) $\lim\limits_{t\to 1} H(t)$ debe existir. Por la naturaleza de la función estudiamos los límites laterales.



- **Límite lateral izquierdo**

$$\lim_{t\to 1^-} H(t) = \lim_{t\to 1^-}\left(at^2+bt+1\right) = a\left(1\right)^2 + b\left(1\right) + 1 = a+b+1.$$

- **Límite lateral derecho**

$$\lim_{t\to 1^+} H(t) = \lim_{t\to 1^+} t^3 = \left(1\right)^3 = 1.$$

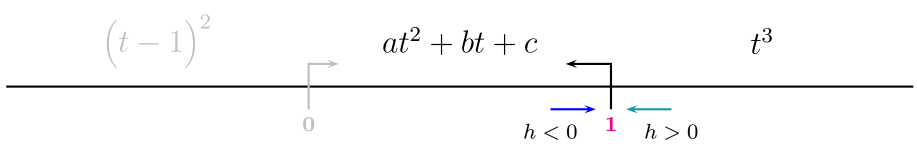
Para que el límite exista se debe cumplir que

$$\lim_{t\to 1^-} H(t) = \lim_{t\to 1^+} H(t) \qquad \Longrightarrow \qquad a+b+1=1 \qquad \Longrightarrow \qquad a+b=0.$$

Para que H sea derivable en $t=1$ debe existir el siguiente

$$H'\left(1\right) = \lim_{h\to 0}\frac{H(1+h)-H(1)}{h}.$$

Calculamos dicho límite, por la naturaleza de la función calculamos los límites laterales



- **Límite lateral izquierdo.** Si $h\to 0^-$, entonces h es negativo, por lo que $1+h<1$, así,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{H(1+h)-H(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+h\right)^2+b\left(1+h\right)+1-\left(a+b+1\right)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{a\left(1+2h+h^2\right)+\cancel{b}+bh+\cancel{1}-a-\cancel{b}-\cancel{1}}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{a}+2ah+ah^2+bh-\cancel{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-}\frac{2ah+ah^2+bh}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\cancel{h}\left(2a+ah+b\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^-}\left(2a+ah+b\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 2a+b.$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{H(1+h)-H(1)}{h} = 2a+b.$$

- **Límite lateral derecho.** Si $h \to 0^+$, entonces h es positivo, por lo que $1+h>1$, así,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{H\left(1+h\right)-H\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left(1+h\right)^3-1}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{1}+3h^2+3h+h^3-\cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\cancel{h}\left(3h+3+h^2\right)}{\cancel{h}} = \lim_{h\to 0^+} \left(3h+3+h^2\right) \overset{\text{S.I.}}{=} 3.$$

Luego,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{H\left(1+h\right)-H\left(1\right)}{h} = 3.$$

Para que el límite exista debe ocurrir que

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{H\left(1+h\right)-H\left(1\right)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{H\left(1+h\right)-H\left(1\right)}{h} \qquad \Longrightarrow \qquad 2a+b=3.$$

Así, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$$

Resolvemos el sistema, de la ecuación $a+b=0$, se tiene que $a=-b$, sustituimos en la ecuación $2a+b=3$ se tiene

$$2\left(-b\right)+b=3 \qquad \Longrightarrow \qquad -2b+b=3 \qquad \Longrightarrow \qquad -b=3 \qquad \Longrightarrow \qquad b=-3,$$

por lo que

$$a=-\left(-3\right) \qquad \Longrightarrow \qquad a=3.$$

Luego, los valores para que la función H sea continua en $t=0$ y derivable en $t=1$ son

$$a=3, \qquad b=-3 \qquad \text{y} \qquad c=1,$$

la función es

$$H\left(t\right) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si} \quad t<0 \\ 3t^2-3t+1 & \text{si} \quad 0\le t\le 1 \\ t^3 & \text{si} \quad t>1 \end{cases}.$$

★